

Exercice 1 :

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 9}}$
4. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$
5. $f(x) = x|x| + 1$
6. $f(x) = x^3 + 4x$
7. $f(x) = x^2 + 7x - 4$
8. $f(x) = x - \frac{9}{x}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Montrer que f est décroissante sur $[0; 1]$.
2. En déduire que la fonction f est majorée par 1 et minorée par -1 .

Exercice 3 :

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g .
2. (a) Déterminer les points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
(b) Vérifier que les points $A(1; 1)$ et $B(4; 2)$ appartiennent à chacune des courbes C_f et C_g .
(c) Tracer les courbes C_f et C_g .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x(x - 4) + 3(2 - \sqrt{x}) \geq 0$$

Exercice 4 :

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{2}{27}x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x + 1}$$

C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g .
2. Vérifier que le point $A(3; 2)$ appartient à chacune des courbes C_f et C_g .
3. Tracer les courbes C_f et C_g .

Exercice 5 :

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{4 - x}{1 + 2x}$$

C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser les tableaux des variations de f et g .
2. (a) Calculer $f(1)$ et $g(1)$.
(b) Tracer les courbes C_f et C_g .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

Exercice 6 :

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x + 1}$$

C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Étudier les variations des fonctions f et g .
3. (a) Tracer les courbes C_f et C_g .
(b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x)g(x) \geq 0$$

4. Soit h la fonction numérique définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$h(x) = x + 2 + 4\sqrt{x + 1}$$

- (a) Vérifier que :

$$h = f \circ g$$

- (b) Étudier les variations de la fonction h .

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. (a) Montrer que f est minorée par le nombre 1. Le nombre 1 est-il le minimum absolu de f ?
(b) Montrer que f est majorée par le nombre 2. Le nombre 2 est-il le maximum absolu de f ?
2. Soit a et b deux réels distincts.
(a) Montrer que :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a + b}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}.$$

- (b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0; +\infty[$ et $] -\infty; 0]$.

3. Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$

Étudier les variations de la fonction g .

4. Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = g \circ f(x)$$

- (a) Déterminer D_h ensemble de définition de h .
- (b) Étudier les variations de h sur D_h .
- (c) En déduire la valeur minimale absolue de h .

Exercice 8 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

1. Soit x et y deux réels positifs et distincts.

- (a) Montrer que :

$$f(x) - f(y) = \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1)}$$

- (b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que la fonction f est bornée par 1 et -1.

3. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x^3} + 1}$$

En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h .

Exercice 9 :

Soit f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \sqrt{3+x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Vérifier que les courbes C_f et C_g se coupent au point $A(1; 2)$.
- (b) Tracer les courbes C_f et C_g .
- (c) Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation :

$$x\sqrt{3+x} - 2 \geq 0$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right] \quad 3 + \frac{2}{x} \geq 0.$$

- (b) Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = \sqrt{3 + \frac{2}{x}}$$

En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h .

- (c) Montrer que h est majorée par le nombre $\sqrt{3}$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{|x|}{x^3 + x}$$

1. (a) Déterminer D_f ensemble de définition de f .
- (b) Vérifier que la fonction f est impaire.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur D_f .
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) 0 < f(x) < 1$
4. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

- (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) g(x) = f \circ f(x)$
- (b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_*^+$.

Exercice 11 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$$

1. Montrer que f est bornée par -4 et 1.
2. Soit x et y deux réels distincts de $[2; +\infty[$.
- (a) Montrer que :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(2x + 1)(2 - y) + (2y + 1)(2 - x)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

- (b) En déduire que f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

3. Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = \frac{4\sqrt{x+2} - 3}{x+3}$$

- (a) Déterminer D_h ensemble de définition de h .
- (b) En utilisant les variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction h .